两种结构的商空间模型比较研究

王加阳,杨正华
(中南大学信息科学与工程学院,湖南长沙 410083)

摘 要: 本文提出了多粒度计算的一般架构,即自顶向下的分解和自底而上的综合.结构在商空间理论中扮演着举足轻重的角色,不同结构下商空间模型会有所差异.在合成方面,具有拓扑结构的不同商空间的合成拓扑不是商拓扑,而具有代数结构的不同商空间的合成运算是商运算.在分解方面,定义了问题等价和可逆分解的概念后,得出了两种结构的分解都是可链式化的,即链式分解和直接分解是等价的,以及代数结构的商空间模型中正交分解是可逆分解,而对于拓扑结构的商空间模型类似结论不一定成立.

关键词: 商空间;粒计算;多粒度计算;可逆分解;合成
中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 11-2262-08
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.11.024

A Comparative Study of Quotient Space Model with Two Structures

WANG Jia-yang, YANG Zheng-hua
(*School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha, Hunan* 410083, *China*)

Abstract: A multi-granular computing architecture, namely a top-down decomposition and bottom-up synthesis is proposed. The structure plays a very important role in quotient space model (QSM), and the QSMs with different structures generally vary. With respect to composition, a composition of topologies of different quotient spaces is generally not a quotient topology, while a operator composition of operators of different quotient spaces is a quotient operator. As for decomposition, it acquires the two important conclusions when defining the concepts of problem equivalence and reversible decomposition. One is that the granulation for two structures by means of either chained or directed are equivalent, the other is that an orthogonal decomposition in QSM with a algebraic structure is reversible, but a similar conclusions is not true in QSM with a topological structure.

Key words: quotient space; granular computing; multi-granular computing; reversible decomposition; composition

1 引言

粒计算(Granular Computing)最早由 T.Y.Lin 于 1997 年提出,虽然所研究的时间并不长,但粒计算业已成为人工智能研究领域的热点之一,越来越受到许多学者的重视.目前对粒计算尚无统一定义,一般认为是利用粒(Granules)求解复杂问题的一切理论、方法、技术和工具的总称[1].粒度的概念源远流长,似乎和智能是一对孪生兄弟.人类能从不同的粒度上感知和描述世界,但仅提取哪些感兴趣的事物特征信息[2].这种在不同粒度认知事物以及不同粒度间转换的能力是人类智能的关键特征,也正是这种能力使人类能把一个复杂的现实世界抽象成一个可计算的、易处理的简单问题[3].由此看来对智能的深入研究离不开粒计算,因此粒计算既有着广阔的应用前景和巨大的潜在价值,也会遇到前所未有的挑战.虽然至今为止对粒计算研究还没有一致的观点和统一的模型,但国内外学者以不同的观点建立了相应的粒计算模型[4~11],并取得了丰硕的理论和实践成果,文献[12,13]十分全面地归纳了粒计算的基本问题和几种主流的模型.

商空间理论是张钹院士和张铃教授提出的、一种主流的和十分重要的粒计算模型.他们认为人类智能的特点就是能够从极不相同的粒度上观察和分析同一问题,而且还能够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度世界[14].在商空间理论中用三元组(X,f,S)描述问题,其中 X 表示论域,f 是论域的属性函数,S 表示论域的结构,又用论域上的等价关系描述问题的粒度.因此,给定一个等价关系 R 就可以对问题粒化而得到该问题的一个商空间$([X],[f],[S])$,其中$[X]$表示论域 X 相对于 R 的商集,$[f]$是商属性函数,$[S]$是商结构[15].引入结

收稿日期:2012-01-16;修回日期:2013-07-08;责任编辑:马兰英
基金项目:国家自然科学基金(No.61173052);湖南省自然科学基金(No.14JJ4007)

构描述使商空间理论有了更强的描述能力,也同时使商空间理论有了更丰富的内涵.当问题结构是拓扑结构时,不同粒度世界的全体构成一个完备半序格,为研究不同粒度世界之间的转换、分解和合成等运算提供了理论依据[16].同时,商空间理论进一步指出粒度世界的变换具有性质保留的特性,即保假、保真原理.利用性质保留特性可以在问题求解过程中删除无关部分,从而加快问题的求解速度[17].笔者在先前研究中讨论了论域结构为代数运算的情况下,也得出了类似结论,即不同具有商运算的粒度世界构成完备半序格,保假、保真原理在具有代数结构的商空间中仍然成立.

本文结合多粒度计算的一般架构,详细比较分析了具有拓扑结构的商空间模型(以下简称为拓扑商空间)和具有代数结构的商空间模型(以下简称为代数商空间)的异同.首先,提出了多粒度计算的一般架构,即自顶向下的分解和自底而上的综合,并分析了商空间模型下多粒度计算架构的特征.其次,比较了多粒度计算下拓扑商空间和代数商空间在合成上的差异,分别从论域合成、属性函数合成和结构合成三方面加以讨论分析.最后,比较了多粒度计算下拓扑商空间和代数商空间在分解过程中的差异,并提出了问题等价和可逆分解等相关概念.

2　多粒度计算的一般架构和商空间模型下的特性

粒化是粒计算研究中最基本也是最重要的问题之一.对于一个问题 P 以及给定问题的一个粒度 G,就可以对问题 P 粒化,$P\xrightarrow{G}P_1$,得到问题 P 的一个粗粒度描写 P_1.当问题 P_1 粒度仍然太细,或者说规模还是不可接受,可以对其继续粒化 $P_1\xrightarrow{G_2}P_2$ 得到问题 P_2.以此类推,可以对问题逐次粒化,形成一个粒化链 $P\cdots\xrightarrow{G_i}P_i\cdots\xrightarrow{G_n}P_n$.这一过程实际上就是一个分层递阶的过程.这种粒度计算模式,每次对问题都做一个方向上的粒化,也就是只取原问题的一个粒度,是一种单一粒度计算方式.实际应用中往往需要从不同粒度上分析原问题,然后把不同粒度上的结果综合起来,这就是多粒度计算.简而言之,多粒度计算即取若干个不同的粒度来分析问题,然后把各个粒度的解综合起来得到原问题的解.

图 1 是多粒度计算的一般架构的示意图,图的上半部分是一个自顶向下的分解过程,也就是粒度构造过程,而下半部分是粒度综合的过程,也就是把不同粒度的解自底而上的综合成一个解.具体而言,对一个问题 P,取问题的若干个粒度 $\{G_1,G_2,\cdots,G_i,\cdots\}$,得到问题 P 的一个粗粒度问题集 $\{P_1,P_2,\cdots,P_i,\cdots\}$,然后再对该问题集中每个问题 P_j 取其若干个粒度 $\{G_{j1},G_{j2},\cdots,G_{ji},\cdots\}$,得到问题 P_j 的一个粗粒度问题集 $\{P_{j1},P_{j2},\cdots,P_{ji},\cdots\}$,直到问题 P 适度为止.假设 G_0 是问题 P 的最细粒度,也就是问题 P 本身对应的粒度,因此可知 $G_1,\cdots,G_i,\cdots\leqslant G_0,G_{j1},\cdots,G_{ji},\cdots\leqslant G_i$.一般而言各个粒度综合 $G_1\cdot G_2\cdot\cdots\cdot G_i\cdot\cdots=\prod_i G_i\leqslant G$,因此,问题 $P'\leqslant P$.如果 $G\prod_i G_i=G$,则问题 $P'=P$,也就是不同粒度解的合成就是原问题的解.若在分解过程中每一次分解都保证 $G_{j1}\cdot G_{j2}\cdot\cdots\cdot G_{ji}\cdot\cdots=\prod_i G_j=G_j$,即保证分解的可逆性,那么就可以通过综合得出原问题的解.

商空间理论是一种典型的、支持多粒度计算的粒计算模型[18].对于商空间模型下多粒度计算架构图只需在图 1 中把问题 P 换成 (X,f,S),粒度 G 换成论域上的等价关系 R 即可.再根据商空间的完备性和性质保留特性不难得出,自顶向下的分解过程就是在问题 (X,f,S) 的所有商空间构成的完备半序格中搜索一棵以 (X,f,S) 为根的树,而自底而上的综合过程就是对这棵树进行后根遍历.

3　拓扑商空间与代数商空间比较

基于商空间模型的多粒度计算就是一个自顶向下的分解(粒化)过程和自底而上的合成过程,下面从这两个方面比较拓扑商空间和代数商空间的异同.

3.1　合成方面比较

综合是人类智能的一个重要特征.人类在对某些事物的认知过程中,往往是从不同的侧面来分析这些事物,然后把这些片面的认识汇总起来得到一个较为全面的认识[5].在商空间理论中把不同粒度世界综合成一个粒度世界的问题就是商空间合成问题.商空间的合成包括论域合成、属性函数合成和结构合成,下面分别讨论两种结构下它们各自的合成及异同.这里需要特别指出的是属性函数合成比较复杂,因为它不但与论域结构联系密切,还与具体应用相关.为了讨论方便,下面给出超商属性函数的概念,在该概念下可使属性函数的分解与合成规范一般化.

定义 1　设满射 $p:X\to Y$,f 为 X 的属性函数,V 为属性值域,定义映射 $[f]:Y\to 2^V$,满足 $\forall y\in Y$,$[f](y)=f(p^{-1}(y))=\{f(x)\mid x\in p^{-1}(y)\}$,则称 $[f]$ 为 Y 上相对 f 的超商属性函.

实际上,超商属性函数就是一个集值函数,可根据特定的应用并结合论域结构对超商属性函数进一步改造,如取这个集合的均值等统计量及其他方式来代替之.

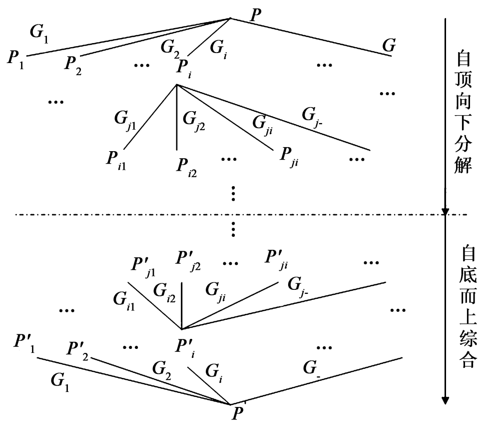

图1 多粒度计算一般架构

商空间合成有如下原则[5]:问题(X,f,S)的两个商空间(X_1,f_1,S_1),(X_2,f_2,S_2)的合成定义为(X_3,f_3,S_3),记作$(X_1,f_1,S_1)\cdot(X_2,f_2,S_2)$,满足如下条件,

(1)X_1,X_2是X_3的商空间.

(2)S_1,S_2是S_3对应于X_1,X_2上的商结构.

(3)f_1,f_2是f在X_1,X_2上的投影,或者说f_1,f_2是X_1,X_2上相对于f的超商属性函数,且(X_3,f_3,S_3)满足一些最优准则.

显然,两个商空间的合成所表达的信息应该不比此两商空间中任意一个所含的信息少.从粒计算的角度而言,两个商空间的合成等价于两个粒度综合成一个粒度,是一个综合的过程.有了两个商空间的合成,就很容易把它扩充到多个商空间的合成,在此不再赘述.以下分别讨论拓扑商空间合成和代数商空间合成,并加以比较分析.

3.1.1 论域合成

命题1[5] 设R_1,R_2是问题(X,T)上的任意两个等价关系,则$R_3=R_1\cap R_2$是R_1,R_2的合成,记作$R_1\cdot R_2$.

因为等价关系的交是等价关系,因此R_3是一个等价关系.再根据等价关系与划分的一一对应性,可知$X/R_3\geqslant X/R_1,X/R_2$,因此满足合成原则的第一条.

不论论域是拓扑结构还是代数结构,它们的论域合成是一致的,都是两个商空间论域的上确界.唯有一点不同的是,前者是在等价关系格中求上确界,而后者是在同余关系格中求上确界.类似可得出多个粒度的论域合成,即若$\{R_\alpha\}_\alpha$是论域的一个非空等价关系簇,则这些粒度的论域合成可定义为$\bigcap_\alpha R_\alpha$.

3.1.2 属性函数合成

由于属性函数合成的最优原则往往与具体应用有紧密关系,因此以下讨论中都只考虑超商属性的情况,从某种意义上说,就是将论域的值域也进行相应的粒化.不论何种情况下的最优准则都是对超商属性函数的进一步修正和提精,因此这种讨论有更一般的意义.

定理1 设(X_1,f_1,S_1),(X_2,f_2,S_2)都是问题(X,f,S)的商空间,则属性函数f_1,f_2的合成$f_1\cdot f_2$可定义为:映射$f_3:X_3\to 2^V$满足,$\forall[x]_3\in X_3$,

$f_3([x]_3)=f_1([x]_1)\cap f_2([x]_2)$,记作

$f_3=f_1\cdot f_2$,其中$X_3=X_1\cdot X_2$,V为论域X的值域,$[x]_i\in X_i$,$i=1,2,3$(以下延续这种记号使用).

证明 首先证f_3是X_3上相对f的超商属性函数.由于f_1,f_2分别为X_1,X_2上相对f的超商属性函数,则可得

$f_1([x]_1)=\{f(x)\mid x\in[x]_1\}$,

$f_2([x]_2)=\{f(x)\mid x\in[x]_2\}$.因此,对$\forall[x]_3\in X_3$,有:

$$\begin{aligned}f_3([x]_3)&=f_1([x]_1)\cap f_2([x]_2)\\&=\{f(x)\mid x\in[x]_1\}\cap\{f(x)\mid x\in[x]_2\}\\&=\{f(x)\mid x\in[x]_1\cap[x]_2\}\end{aligned}$$

又由于$X_3=\sup\{X_1,X_2\}$,则$[x]_1\cap[x]_2=[x]_3$,故$f_3([x]_3)=\{f(x)\mid x\in[x]_3\}$,即$f_3$是$X_3$上相对$f$的超商属性函数.

再证f_1,f_2分别为X_1,X_2上相对f_3的超商属性函数.作投影$p:X_3\to X_1$使得对$\forall[x]_3\in X_3$,有$p([x]_3)=[x]_1$.于是,对$\forall[x]_1\in X_1$,有:

$$\begin{aligned}f_3(p^{-1}([x]_1))&=f_3(\{[z]_3\in X_3\mid p([z]_3)=[x]_1\})\\&=\bigcup_{[z]_3\in X_3,p([z]_3)=[x]_1}f_3([z]_3)\\&=\bigcup_{[z]_3\in X_3,[z]_3\subseteq[x]_1}f_3([z]_3)\\&=\bigcup_{[z]_3\in X_3,[z]_3\subseteq[x]_1}\{f(x)\mid x\in[z]_3\}\\&=\{f(x)\mid x\in[x]_1\}\\&=f_1([x]_1)\end{aligned}$$

因此f_1是X_1上相对于f_3的超商属性函数.同理可证f_2是X_2上相对于f_3的超商属性函数,所以根据合成原则$f_3=f_1\cdot f_2$.

在超商属性函数的情况下,属性函数的合成是唯一的,而且不用考虑论域结构.因此,不论是在拓扑结构下还是代数结构下属性函数的合成都是一样的.类似可得出多粒度下属性函数的合成,即$\{R_\alpha\}_\alpha$是问题(X,f,S)的一个粒度簇,f_α是R_α对应商空间的超属性函数,则属性合成定义为$f_*:X_*=\dfrac{X}{\bigcap_\alpha R_\alpha}\to 2^V$,满足对$\forall[x]\in X_*$,有$f_*([x]_*)=\bigcap_\alpha f_\alpha([x]_\alpha)$,其中$[x]_\alpha\in\dfrac{X}{R_\alpha}$.

3.1.3 结构的合成

引入结构描述是商空间理论的表达能力强于其他粒计算模型的一个主要原因,也是商空间理论丰富性的根源所在.描述结构的数学工具有很多,常见的有拓

扑和代数两种.下面讨论这两种结构下结构的合成问题.

命题 2[5]　设(X_1,T_1),(X_2,T_2)是(X,T)的两个商空间,令 T_3 是以 $B=\{u\cap v \mid u\in T_1, v\in T_2\}$为基的拓扑,则 T_3 为 T_1,T_2 的拓扑结构合成,即 $T_3=T_1\cdot T_2$.

若设$[T]_3$ 为 X_3 上相对于 T 的商拓扑,则一般而言,T_1,T_2 的合成拓扑 $T_1\cdot T_2\leqslant[T]_3$.这种情况下合成空间不是原空间的商空间,从而会丧失一些可商的拓扑性质.类似可得出多个粒度的拓扑合成,这里不再赘述.

例 1　设论域 $X=\{1,2,3,4,5\}$,对应的拓扑为
$T=\{\Phi,\{1\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\},X\}$.若取商空间
$X_1=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$,对应的商拓扑为
$T_1=\{\Phi,\{\{3\}\},\{\{1,2\}\},\{\{1,2\},\{3\}\},X_1\}$,再取商空间
$X_2=\{\{1,5\},\{2,4\},\{3\}\}$,对应的商拓扑为
$T_2=\{\Phi,\{\{3\}\},X_2\}$,则论域合成及其商拓扑分别为:
$X_3=X_1\cdot X_2=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,
$T_3=\{\Phi,\{\{1\}\},\{\{3\}\},\{\{1\},\{2\}\},\{\{1\},\{3\}\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\},X_3\}$.如果按拓扑合成法则,那么合成拓扑的基为:

$$B=\{\{3\},\{\{1\},\{2\}\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\},X_3\},$$

从而合成拓扑为:
$T_1\cdot T_2=\{\Phi,\{\{3\}\},\{\{1\},\{2\}\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\},X_3\}$,显然 $T_1\cdot T_2\leqslant T_3$.

从例 1 可看出,尽管 $X_1\cdot X_2$ 在论域上与原问题等价的(即含有对应的颗粒,以下会详加阐述),但是合成结构比原问题结构简单,或者说丢失了某些信息.直观上看是某些开集在粒化后被“湮没”,因此再合成的时候不能还原,比如该例中 X 上的开集$\{1\}$.

定理 2　设$(X_1,\circ_1)$,$(X_2,\circ_2)$是$(X,\circ)$的两个商空间,$X_3=X_1\cdot X_2$,$\circ_3$:$X_3\times X_3\to X_3$ 满足,对$\forall[x]_3\in X_3$,$[x]_3\circ_3[y]_3=([x]_1\circ_1[y]_1)\cap([x]_2\circ_2[y]_2)$,则$\circ_3$ 是可定义的,且$\circ_3$ 是 X_3 上相对于$\circ$的商运算,同时$\circ_1$,$\circ_2$ 是在 X_1,X_2 商相对于$\circ_3$ 的商运算.

证明　$\circ_3$ 是可定义的,这是因为:对$\forall([x]_3,[y]_3)\in X_3\times X_3$,由于 $X_3=X_1\cdot X_2$,则存在唯一$[x]_1$,$[y]_1\in X_1$,$[x]_2$,$[y]_2\in X_2$ 使得$[x]_3=[x]_1\cap[x]_2$ 和$[y]_3=[y]_1\cap[y]_2$.于是$[x]_1\circ_1[y]_1$ 和$[x]_2\circ_2[y]_2$ 是唯一存在的,所以$([x]_1\circ_1[y]_1)\cap([x]_2\circ_2[y]_2)$是唯一存在的,故$\circ_3$ 是可定义的.

其次证$\circ_3$ 是 X_3 上的商运算.由于$\circ_1$ 为 X_1 上相对于$\circ$的商运算,则对$\forall[x]_1$,$[y]_1\in X_1$,有$[x]_1\circ_1[y]_1=[x\circ y]_1$,同理可得$[x]_2\circ_2[y]_2=[x\circ y]_2$.于是有:

$$\begin{aligned}[x]_3\circ_3[y]_3&=([x]_1\circ_1[y]_1)\cap([x]_2\circ_2[y]_2)\\&=[x\circ y]_1\cap[x\circ y]_2\\&=[x\circ y]_3\end{aligned}$$

因此,$\circ_3$ 是 X_3 上的商运算.

再证$\circ_1$,$\circ_2$ 是 X_1,X_2 上对应于$\circ_3$ 的商运算.作映射 p:$X_3\to X_1$ 使得$\forall[x]_3\in X_3$,$p([x]_3)=[x]_1$,则易知 p 是一个满射.于是$\forall[x]_3$,$[y]_3\in X_3$ 有:

$$\begin{aligned}p([x]_3)\circ_1 p([y]_3)&=[x]_1\circ_1[y]_1\\&=[x\circ y]_1\\&=p([x\circ y]_3)\\&=p([x]_3\circ_3[y]_3)\end{aligned}$$

因此$\circ_1$ 为 X_1 相对于$\circ_3$ 的商运算,同理可证$\circ_2$ 是 X_2 上相对于$\circ_3$ 的商运算.综上所述,命题得证.

定理 2 说明合成运算是合成论域上的商运算,即合成运算与合成论域诱导出来的商运算是等价的.这表明了具有代数结构的商空间合成是原空间的商代数空间,从而比拓扑商空间合成更加完备,不会导致商结构信息的丢失,因为一般情况下合成拓扑不是原问题结构的商拓扑.类似可得出多粒度下具有代数结构的商空间的结构合成,即$\{R_\alpha\}_\alpha$ 是问题$(X,\circ)$上的一个同余关系簇,$X_*=\underset{\alpha}{\cdot}X_\alpha$,则对粒度簇$(X_\alpha,\circ_\alpha)_\alpha$ 的结构合成为$\circ_*$满足对$\forall[x]_*$,$[y]_*\in X_*$,$[x]_*\circ_*[y]_*=\bigcap_\alpha[x]_\alpha\circ_\alpha[y]_\alpha$,其中$[x]_\alpha\in X/R_\alpha$,$\circ_\alpha$ 为 X/R_α 上的商运算.

3.2　分解方面比较

合成是对不同角度的观点加以综合,而分解正好相反,也就是从不同的角度来分析同一问题.下面讨论代数结构和拓扑结构下商空间多粒度计算的分解问题.

3.2.1　链式粒化与直接粒化的等价性

对论域的粒化可以根据某一给定的等价关系对等价元归并一次性得到,另外也可以通过逐步粒化的方式求得.例如对于论域

$X=\{1,2,3,4,5\}$,取粒度 $X_1=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$可以在 X 上直接归并等价元素获取,也可以在 X 的一个已有划分

$X_2'=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5\}\}$上再粒化得 $X_2=\{\{\{1\},\{2\}\},\{\{3\}\},\{\{4,5\}\}\}$.这两个虽然形式上不一样,但其本质是完全一致的,因为它们含有彼此对应等价粒子.显然已有划分也可以是另一个划分的再划分,实际上这个迭代的过程是一个分层递阶的过程,或者说是一个链式粒化的过程.在多粒度计算过程中,链式粒化通常会产生与高层等价的问题.下面讨论粒度的等价性问题,并给出链式粒化过程中一个重要特性.

定义 2　设 p_1:$X\to X_1$,p_2:$X\to X_2$ 是满射,即 X_1,X_2 是论域 X 的两个商集.若存在一一映射 p:$X_1\to X_2$,且对$\forall a\in X_1$,满足 $p_1^{-1}(a)=p_2^{-1}(p(a))$,则称粒化 p_1,p_2 等价,或称 X_1,X_2 互为等价粒度,记作 $X_1\equiv X_2$.

两个粒度 X_1,X_2 互为等价,实际上就是指这两个粒度中的有相互对应的颗粒,且它们含有相同的论域元素.因此,虽然两个互为等价的粒度所含粒子的组织形式不一样,但它们都含语义相同的对应粒子,从而所表达的意义是相同的.

例 2 设论域 $X=\{1,2,3,4,5\}$,取其拓扑

$T=\{\Phi,\{2\},\{1,2\},\{3,4\},\{2,5\},\{1,2,5\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\},X\}$取 X 的商集

$X_1=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$,求得其商拓扑为

$T_1=\{\Phi,\{\{1,2\}\},X_1\}$;再取 X 的商集

$X_2'=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5\}\}$,求得其商拓扑为

$T_2'=\{\Phi,\{\{2\}\},\{\{1\},\{2\}\},\{\{2\},\{3\},\{4,5\}\},X_1\}$,再取 X_2' 的商集

$X_2=\{\{\{1\},\{2\}\},\{\{3\}\},\{\{4,5\}\}\}$,求得其商拓扑

$T_2=\{\Phi,\{\{\{1\},\{2\}\}\},X_2\}$.

例子 2 中 $X_1\equiv X_2$,X_1 的拓扑是直接由 X_1 对应的等价关系诱导得出的,即商拓扑.X_2 的拓扑是采用链式方式生成的,即先取中间粒度 X_2',然后再在其上粒化并诱导相应的商拓扑.可以看出 T_1 和 T_2 是等价的,即对任意的 X_1 上的开集,它在 X_2 上对应的子集是 X_2 的开集.下面给出更一般的结论并加以证明.

定理 3 设(X_1,T_1)是问题(X,T)由等价关系 R_1 直接诱导产生的商空间,记为 $p:(X,T)\to(X_1,T_1)$,(X_2',T_2')是问题(X,T)由等价关系 R_2' 直接诱导产生的商空间,记为 $p_1:(X,T)\to(X_2',T_2')$,(X_2,T_2)是问题(X_2',T_2')由等价关系 R_2 直接诱导产生的商空间,记为 $p_2:(X_2',T_2')\to(X_2,T_2)$,若 $X_1\equiv X_2$,则对 $\forall A\in T_1$,存在唯一 $B\in T_2$ 与之对应,记作 $T_1\equiv T_2$.

证明 由于 $X_1\equiv X_2$,则对 $\forall a\in X_1$,存在唯一 $b\in X_2$,使得

$p^{-1}(a)=(p_1\cdot p_2)^{-1}(b)$.于是 $\forall A\in T_1$,有 $A=\bigcup\limits_{a\in X_1}a$,所以存在唯一

$$B=\bigcup_{a\to b\in X_2,a\in A}b\subseteq X_2.$$

又,$$(p_1\cdot p_2)^{-1}(B)=\bigcup_{a\to b\in X_2,a\in A}(p_1\cdot p_2)^{-1}(b)=\bigcup_{a\in A}p^{-1}(a)=p^{-1}(A)\in T.$$因此,$B\in T_2$,命题得证.

上述结论是在两次链式粒化的情况下得出的,类似可得出多重链式粒化下结论依然成立,即对$(X,T)\cdots\xrightarrow{p_i}(X_{2i},T_{2i})\cdots\xrightarrow{p_n}(X_{2n},T_{2n})$和直接粒化$(X,T)\xrightarrow{p}(X_1,T_\circ)$,若 $X_1\equiv X_{2n}$,则 $T_{2n}\equiv T_1$.定理 3 说明链式粒化不会导致商拓扑信息损失,也就是说直接诱导产生的商拓扑与链式方式产生的商拓扑是等价的.下面在此基础上进一步给出问题等价性定理.

定理 4 对于问题(X,f,T)的两个商空间(X_1,f_1,T_1),(X_2,f_2,T_2),若 $X_1\equiv X_2$,则$(X_1,f_1,T_1)\equiv(X_2,f_2,T_2)$,即 $T_1\equiv T_2$,且 $\forall a\in X_1$,对于 $a\to b\in X_2$ 满足 $f_1(a)=f_2(b)$.

证明 由定理 3 可得 $T_1\equiv T_2$.另一方面,由于 $X_1\equiv X_2$,则 $\forall a\in X_1$,$\exists b\in X_2$ 使得 $p_1^{-1}(a)=p_2^{-1}(b)$,其中 p_1,p_2 分别为 X 到 X_1,X_2 的投影.于是,

$$\begin{aligned}f_1(a)&=\{f(x)\mid x\in p_1^{-1}(a)\}\\&=\{f(x)\mid x\in p_2^{-1}(b)\}\\&=f_2(b)\end{aligned}$$

故命题得证.

直观上说,两个等价的问题含有彼此对应着的粒子,虽然对应着的粒子组织形式不同,但它们都含有相同的论域元素,且其属性函数和拓扑结构也是等价的.定理 4 说明了,在基于商空间的多粒度计算的自顶向下逐层分解过程中会产生很多等价的问题.因此对等价问题只需分析解决其中一个就行了.对于具有代数结构的问题,也有以上的类似结论.

定理 5 设有粒化 $p_0:(X,\circ)\to(X_1,\circ_1)$,

$p_1:(X,\circ)\to(X_2',\circ_2')$,$p_2:(X_2',\circ_2')\to(X_2,\circ_2)$,若 $X_1\equiv X_2$,则$\circ_1\equiv\circ_2$,即若 $g:X_1\to X_2$ 为投影,则 g 是同构映射.

证明 由于 $X_1\equiv X_2$,则对 $\forall a_1,a_2\in X_1$,有 $g(a_1)$,$g(a_2)\in X_2$.于是可得,$\exists u,v\in X_2'$ 使得 $u\in g(a_1)$,$v\in g(a_2)$,同时 $\exists x,y\in X$ 使得$x\in u$,$y\in v$.于是,

$$\begin{aligned}g(a_1)\circ_2 g(a_2)&=p_2(u\circ'_2 v)\\&=p_2(p_1(x\circ y))\\&=p_1\cdot p_2(x\circ y)\\&=g(p_0(x\circ y))\\&=g(p_0(x)\circ_1 p_0(y))\\&=g(a_1\circ_1 a_2)\end{aligned}$$

因此 g 为同构映射,命题得证.

对于多重链式粒化有相同结论,即$(X,\circ)\cdots\xrightarrow{p_i}(X_{2i},\circ_{2i})\cdots\xrightarrow{p_n}(X_{2n},\circ_{2n})$和直接粒化$(X,\circ)\xrightarrow{p}(X_1,\circ_1)$,若 $X_1\equiv X_{2n}$,则$\circ_{2n}\equiv\circ_1$.在超商属性函数的情况下,由于属性函数的分解和合成与结构无关,因此对于具有代数结构的商空间也具有类似的问题等价性定理.

从以上讨论可知,不论问题的结构是拓扑还是代数,对问题进行粒化既可以直接诱导得出,也可以采用链式的方式获得,也就是在已有的商空间中再次粒化获取.因此,在多粒度多层次求解问题的自顶向下分解过程中,可以不必直接在原问题上粒化,而是在原问题的已有粒度上再粒化,这样可以减少粒化所需的时间

开销，提高求解效率.

3.2.2　多粒度分解的可逆性

通常人们会从不同的角度（粒度）分析问题，然后再把不同角度下的分析结果加以综合得出原问题的解.但这个解是否为原问题的解，通常要看分析是否全面，即所取粒度是否完备.下面在商空间模型下，用形式化方法定义这种粒度分解的完备性概念.

定义 3　设 R_1,R_2 是问题(X,f,S)上的两个粒度，I 为 X 上恒等关系（以下均延续使用此符号），若当 $R_1\cap R_2=I$，则称 R_1,R_2 为问题(X,f,S)的正交分解.一般地，对(X,f,S)上的粒度簇$\{R_\alpha\}_\alpha$，若$\bigcap\limits_\alpha R_\alpha=I$，则称$\{R_\alpha\}_\alpha$ 为问题(X,f,S)的正交分解.

定义 4　设 R_1,R_2 是问题(X,f,S)的一个正交分解，如果 R_1,R_2 二者对应的商空间的合成$(X_1,f_1,S_1)\cdot(X_2,f_2,S_2)\equiv(X,f,S)$，那么则称 R_1,R_2 为问题(X,f,S)的可逆分解.

可逆分解就是粒度分解是完备的，即分解以后各种粒度世界的合成与原问题等价，也就是说分析是全面.类似的，可以定义多个粒度下的可逆分解，即$\{R_\alpha\}_\alpha$ 是问题(X,f,S)的一个正交分解，若$\mathop{\cdot}\limits_\alpha(X_\alpha,f_\alpha,S_\alpha)\equiv(X,f,S)$，则$\{R_\alpha\}_\alpha$ 是问题的可逆分解，其中$(X_\alpha,f_\alpha,S_\alpha)$是问题$(X,f,S)$在 R_α 下的商空间.

对于具有拓扑结构的问题(X,f,T)的两个商空间(X_1,f_1,T_1)，(X_2,f_2,T_2)，设它们的合成为(X_3,f_3,T_3)，如果 $X_3\equiv X$，那么是否有$(X_3,f_3,T_3)\equiv(X,f,T)$.显然合成问题与原问题有着相同的粒子和属性函数，但从例 3.1 可以看出合成的结构不是原问题的商结构，也就是说 T_3 与 T 不等价.从而可知拓扑商空间的正交分解一般情况下不必然是可逆的，但是代数商空间的正交分解一定是可逆分解，下面用定理的形式给出并加以证明.

定理 6　设 R_1,R_2 是问题$(X,f,\circ)$上一个正交分解，$(X_1,f_1,\circ_1)$，$(X_2,f_2,\circ_2)$是分别为$(X,f,\circ)$对应于 R_1,R_2 的商空间，则 R_1,R_2 是问题$(X,f,\circ)$的可逆分解.

证明　设$(X_1,f_1,\circ_1)\cdot(X_2,f_2,\circ_2)=(X_3,f_3,\circ_3)$，作映射 $p:X\to X_3$ 使得$\forall x\in X,p(x)=[x]_1\cap[x]_2$.

对$\forall x\in X$，可证$[x]_1\cap[x]_2=[x]_I$.一方面，$[x]_I=\{x\}\subseteq[x]_1,[x]_2$，从而$[x]_I\subseteq[x]_1\cap[x]_2$；另一方面，对$\forall y\in[x]_1\cap[x]_2$，则$(x,y)\in R_1,R_2$.因此 $y\in[x]_I$，于是$[x]_I\supseteq[x]_1\cap[x]_2$，故$[x]_1\cap[x]_2=[x]_I$.

于是$\forall x\in X,p(x)=[x]_1\cap[x]_2=[x]_I=\{x\}$.显然，$p$ 是一个双射，且它们对应的颗粒有相同的元素，则 $X_3\equiv X$.再根据定理 3.5 可知，$\circ_3$ 是 X_3 上相对$\circ$的商运算，因此对$\forall x,y\in X$，有 $p(x\circ y)=p(x)\circ_3p(y)$，$\circ_3\equiv\circ$.又易知 $f_3\equiv f$，故$(X_3,f_3,\circ_3)\equiv(X,f,\circ)$.

类似可以把结论推广到多粒度分解的情况，即对于问题$(X,f,\circ)$一个分解簇$\{R_\alpha\}_\alpha$ 为正交分解，则这些分解的合成$\mathop{\cdot}\limits_\alpha(X_\alpha,f_\alpha,\circ_\alpha)\equiv(X,f,\circ)$，其中$(X_\alpha,f_\alpha,\circ_\alpha)$是问题在分解 R_α 下的商空间.需要注意的是这里的分解簇是同余关系簇而不是一般等价关系簇.根据定理 6 再结合保假、保真原理可以得出，对一个问题的可逆分解可以保证信息无损失，即如果原问题有解，那么根据保假原理可知它的各个分解都是有解的，各个解的合成就是合成问题的解，又合成结果与原问题等价，因此合成解就是原问题解.反之，原问题无解，那么与之等价的各个分解的合成也就无解，因此各个分解也就无解.从这点而言，代数结构商空间求解要优于拓扑结构商空间求解，因为拓扑结构商空间的正交分解一般不具可逆性，也就是说正交分解后的合成一般不是原问题的等价问题，因此完备性方面不如代数商空间.直观上看，代数商空间的正交分解之所以具有可逆性主要是因为在分解过程采用的不是一般等价关系，而是考虑了代数结构的同余关系，也就是说粒化过程中考虑了结构因素.而对于拓扑商空间而言，在粒化过程中并没有特别考虑结构因素，因此合成时会导致商结构信息的损失.由此也可以看出，结构在问题求解中的重要性.

以上讨论了多粒度计算下两种结构的商空间分解.虽然代数商空间的分解更加完备，但一般而言代数结构下的分解由于不是取一般的等价关系，而是比等价关系要求更强的同余关系，因此分解时会相对复杂些，下面讨论代数商空间分解时的相关问题.

对于代数$(X,\circ)$的两个等价关系 R_1,R_2，一般情况下 R_1,R_2 不是同余关系，此时 R_1,R_2 对应的商空间上没有商运算，从而必须对等价关系 R_1,R_2 进行相应的修正.可以用近似对$(\underline{R}_1,\bar{R}_1)$，$(\underline{R}_2,\bar{R}_2)$分别近似表示 R_1,R_2，即可取 $R_1'=\bar{R}_1$ 或者 $\underline{R}_1$，$\bar{R}_2'=\bar{R}_2$ 或者 $\underline{R}_2$[5].如果希望近似后的分解具有可逆性，那么应该怎么近似.下面的定理回答了这一问题.

定理 7　设 R_1,R_2 为代数$(X,\circ)$上两个等价关系，若 $R_1\cap R_2=I$，则 $\bar{R}_1\cap\bar{R}_2=I$.

证明　由于 $I\subseteq\bar{R}_1\subseteq R_1$，$I\subseteq\bar{R}_2\subseteq R_2$，则 $I\subseteq\bar{R}_1\cap\bar{R}_2\subseteq R_1\cap R_2=I$，故 $\bar{R}_1\cap\bar{R}_2=I$，命题得证.

类似可以推出多粒度分解时结论依然成立.从定理 7 可知，对于具有代数结构的问题$(X,\circ)$，正交粒度簇$\{R_\alpha\}_\alpha$ 一般并非同余关系簇，此时可以对其调整，即对每个 R_α 取上同余得到$\{\bar{R}_\alpha\}_\alpha$，则它是问题$(X,\circ)$的一个可逆分解.需要指出的是，一般而言当 $R_1\cap R_2=I$ 时，$\underline{R}_1\cap\bar{R}_2\neq I$，$\underline{R}_1\cap\underline{R}_2\neq I$，也就是说 $\underline{R}_1,\bar{R}_2$ 和 $\underline{R}_1,\underline{R}_2$

不一定是问题的可逆分解,很显然当 $\underline{R}_1 = E, \bar{R}_2 \subset I$ 时, $\underline{R}_1 \cap \bar{R}_2 = E \cap \bar{R}_2 = \bar{R}_2 \subset I$.

4　结论

本文在多粒度计算背景下详细比较了拓扑商空间和代数商空间的一些主要异同;(1)两者都具有对应的完备性定理和粒度转换时性质保留特性,这使得它们在多粒度计算下的自顶向下的分解过程就是在所有商空间构成的完备半序格中搜索一颗树,而自底而上的合成过程就是对这棵树的后根遍历;(2)在论域合成方面二者是相同的,都是取粒度集的上确界.在本文所引入的超商属性函数的情况下,属性函数的合成是唯一的,而且不用考虑论域结构,因此二者属性函数的合成都是一样的.在结构合成方面,合成运算是合成论域上的商运算,即合成运算与合成论域诱导出来的商运算是等价的,而一般合成拓扑不是合成论域上的商拓扑.这表明了代数商空间合成比拓扑商空间合成更加完备,不会导致商结构信息的丢失,而一般情况下拓扑商空间的合成会有商结构丢失,从而不能很好反映原空间的一些重要特征;(3)在分解方面不论是拓扑商空间还是代数商空间,对问题进行粒化既可以根据给定的等价关系直接诱导得出,也可以采用链式的方式获得,且这两种方式是等价的.因此,在多粒度多层次求解问题时,可以不必直接在原问题上粒化,而是在原问题的已有粒度上再粒化.在分解的可逆性方面,一般而言拓扑商空间的正交分解不必然具有可逆性,但代数商空间的正交分解一定具有可逆性.通过这些比较分析,不难看出商空间理论中结构的重要性,也正是由于引入了对结构的描述,才使得商空间有了更强大的描述和求解问题的能力.

参考文献

[1] Yao YY. Three perspectives of granular computting[J]. Journal of Nanchang Institute of Technology, 2006, 25(2): 16 – 21.

[2] Hobbs JR. Granularity[A]. Proc. of the IJCAI[C]. IEEE Press, 1985.432 – 435.

[3] Yao JT. A Ten-year review of granular computing[A]. IEEE Conference on Granular Computing[C]. San Jose, California, USA. IEEE Press, 2-4 November 2007, 734 – 739.

[4] Lin TY. Granular computing based on binary relations I: Data Mining and neighborhood systems[A] Skowron A. Rough Sets in Knowledge Discovery[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998.107 – 121.

[5] 张铃,张钹.问题题求解理论及应用[M].北京.清华大学出版社,2007.4 – 106.
Zhang Ling, Zhang Bo. Theory and applications of problem solving[M]. Beijing. Tsinghua university Press, 2007.4 – 106. (in Chinese)

[6] Zadeh L A. Fuzzy sets and information granularity[A]. M. Gupta. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications[C]. Amsterdam. North-Holland Press, 1996.433 – 448.

[7] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Parallel Programming, 1982.11(5): 341 – 356.

[8] Lin TY. Granular computing based on binary relations II: Rough set representations and belief functions[A] Skowron A. Rough Sets in Knowledge Discovery[M]. Heidelberg. Physica-Verlag, 1998.121 – 140.

[9] Yao YY. A partition model of granular computing[J]. LNCS Transactions on Rough Sets, 2004.2(1): 232 – 253.

[10] 李长云,李赣生,李莹.基于扩展的粒度计算的软件体系结构模型-EGSA[J].电子学报,2005,33(2):271 – 275.
Li Changyun, Li Gansheng1, Li Ying. EGSA: extended granular computing-based software architecture model [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(2): 271 – 275. (in Chinese)

[11] 郎丛妍,须德,李兵.一种基于模糊信息粒化的视频时空显著单元提取方法[J].电子学报,2007,35(10):2023 – 2028.
Lang Congyan, Xu De, Li Bing. Using fuzzy information granulation for spatio-temporal salient unit detection in video sequences[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(10): 2023 – 2028. (in Chinese)

[12] 折延宏,王国俊.粒计算的一种覆盖模型[J].软件学报,2010,21(11):2782 – 2789.
She Yanhong, Wang Guojun. Covering model of granular computing[J]. Journal of Software, 2010, 21(11): 2782 – 2789. (in Chinese)

[13] 李道国,苗夺谦,等.粒度计算研究综述[J].计算机科学,2005,32(9):1 – 12.
Li Daoguo, Miao Duoqian, et al. An overview of granular computing[J]. Computer Science, 2005, 32(9): 1 – 12. (in Chinese)

[14] 王国胤,张清华,等.粒计算研究综述[J].智能系统学报,2007,2(6):8 – 26.
Wang Guoyin, Zhang Qinghua, et al. An overview of granular computing[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2007, 2(6): 8 – 26. (in Chinese)

[15] 王国胤,张清华,等.知识不确定性问题的粒计算模型[J].软件学报,2011,22(4):676 – 694.
Wang Guoyin, Zhang Qinghua, et al. Granular computing models for knowledge uncertainty[J]. Journal of Software, 2011, 22(4): 676 – 694. (in Chinese)

[16] 张铃,张钹.商空间粒度计算中结构完备性的若干问题[J].计算机科学,2005,32(8):127 – 130.
Zhang Ling, Zhang Bo. Some problems on the completeness of structure in the granular computing based on quotient space

[J]. Computer Science, 2005, 32(8): 127 - 130. (in Chinese)

[17] 张燕平,张铃,等. 不同粒度世界的描述法—商空间法[J]. 计算机学报, 2004, 27(3): 328 - 333.
Zhang Yanping, Zhang Ling, et al. The representation of different granular worlds: a quotient space[J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(3): 328 - 333. (in Chinese)

[18] 张钹,张铃. 粒计算未来发展方向探讨[J]. 重庆邮电大学学报, 2010, 22(5): 538 - 540.
Zhang Ling, Zhang Bo. Discussion on future development of granular computing[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications, 2010, 22(5): 538 - 540. (in Chinese)

作者简介

王加阳　男,1963 年出生于湖南长沙,中南大学信息科学与工程学院教授,博士生导师,主要研究方向智能计算与信息融合.
E-mail: csuwjy@mail.csu.edu.cn

杨正华　男,1986 年出生于湖南岳阳,中南大学信息科学与工程学院硕士,主要研究方向智能信息处理.
E-mail: yzh5211314@163.com